

Guía de lectura Nro. 15 (sistemas axiomáticos). Versión: 1.30 25-SEP-2007. Primera versión: 06-SEP-2005. Autor de esta guía: Ariel Yoguel. Universidad de Buenos Aires. Ciclo Básico Común. Metodología de las Ciencias Sociales (Cátedra Alicia Gianella) / Introducción al Pensamiento Científico (Cátedra Pablo García). Bibliografía: [1] Gladys Palau y Manuel Comesaña, "Introducción al pensamiento científico. El conocimiento. Las ciencias formales", Bs. As., EUDEBA, 1994, material de cátedra para la asignatura Introducción al Pensamiento Científico, Programa de Educación a Distancia UBA XXI, Ciclo Básico Común, Universidad de Buenos Aires, módulo 1, § 1.2, pp. 56-67. [2] Alicia Gianella, "Ficha didáctica: sistemas axiomáticos", ficha de cátedra para uso interno publicada en la primera selección de textos de MCS por Ediciones Cooperativas, fecha de edición desconocida.

Lecturas complementarias para este capítulo: no se requieren.

1. Sea S un sistema axiomático caracterizado por los siguientes dos axiomas:

A₁. Dados el conjunto C y la operación binaria $*$ entre los elementos de C , se cumple que

$a * b$ es también un miembro de C . ($\forall a$ y b , si $a, b \in C$ ent. $a * b \in C$)

A₂. Existe un elemento e de C , tal que dado cualquier elemento a de C , se cumple que

$a * e = e * a = a$. ($\exists e / \forall a$, si $a, e \in C$ ent. $a * e = e * a = a$)

- ¿Por qué S es un sistema axiomático formal?
- ¿Qué se requiere para proporcionar una interpretación de S ?
- ¿Qué se requiere para proporcionar un modelo de S ?
- Dadas las siguientes reglas de designación:

R₁. ' C ' designa al siguiente subconjunto M del conjunto de los números naturales con el cero, $M = \{0, 2, 4\}$.

R₂. ' $*$ ' designa a la operación de suma (+) entre dos números.

¿Es esta interpretación un modelo de S ? Si no es el caso, modifique convenientemente las reglas de designación dadas a fin de obtener una nueva interpretación que sea un modelo de S .

- Proponga un modelo de S que interprete a ' $*$ ' como el producto aritmético (\times) entre dos números.
- ¿Por qué se puede afirmar que S es un sistema axiomático consistente? Tenga en cuenta la noción de *modelo* para responder a esta pregunta.
- Explique por qué la interpretación de S proporcionada en e) puede utilizarse para probar la independencia del axioma A₁.

Este ejercicio fue preparado por Carlos Oller (Facultad de Filosofía y Letras, 1992) para el cuadernillo de ejercicios complementarios de la materia Introducción al Pensamiento Científico, Programa UBA XXI. El ejercicio es el Nro. 30 y se encuentra en la página 11 del cuadernillo.

2. Sea S un sistema axiomático formal, y sean V y L dos clases no vacías cualesquiera caracterizadas por los siguientes cinco axiomas de S :

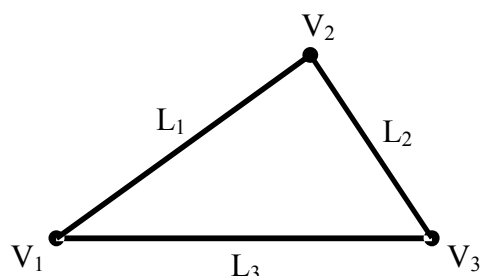
A₁. Cada par de miembros de V está contenido en un solo miembro de L .

A₂. Ningún miembro de V está contenido en más de dos miembros de L .

A₃. Los miembros de V no están todos contenidos en un único miembro de L .

A₄. Cada par de miembros de L tiene en común un único miembro de V .

A₅. Ningún miembro de L contiene más de dos miembros de V .



Considere la interpretación de S representada en la figura de más abajo: sea V la clase de los puntos que forman los vértices de un triángulo $V = \{V_1, V_2, V_3\}$, y sea L la clase de las líneas que forman los lados de ese triángulo $L = \{L_1, L_2, L_3\}$. La expresión ‘un miembro de V está contenido en un miembro de L ’ significa que un punto que es un vértice del triángulo está sobre una línea que es un lado. Es la relación que tienen, por ejemplo, V_1 y L_3 .

- a) Rescriba los cinco axiomas de S interpretados de esta manera.
- b) ¿Es esta interpretación un modelo de S ?

Adaptación de un ejemplo mencionado en Ernest Nagel y James R. Newman, *Gödel's Proof*, New York, New York University Press, 1986, pp. 16-17.

3. Sea S un sistema axiomático caracterizado por los siguientes cinco axiomas:

- A₁. Hay perros.
- A₂. Una pulga es un insecto.
- A₃. Todos los perros tienen pulgas.
- A₄. Algunos perros tienen dueño.
- A₅. Un buen dueño no tiene insectos.

Pruebe en S los siguientes teoremas indicando en cada caso cómo hizo la derivación. Para mayor información sobre el modo de construir una prueba deductiva véase el primer módulo de Introducción al Pensamiento Científico, Programa UBA XXI, 1994, pp. 50-55.

- T₁. Las pulgas existen.
- T₂. Algunas mascotas tienen pulgas.
- T₃. Los buenos dueños no tienen perros.

4. Sea MIU un sistema axiomático formal definido de la manera siguiente. El alfabeto de MIU tiene tres letras mayúsculas, la ‘M’, la ‘I’ y la ‘U’, y ningún otro símbolo. Es decir, $A = \{M, I, U\}$. Algunos ejemplos posibles de palabras en MIU son: MU, UIM, MUUMUU, UIIUMIUUIIUMIU (de aquí en más cuando el contexto sea claro evitaremos el uso de comillas al citar palabras de MIU). Téngase en cuenta que MI es una palabra diferente de IM. Además del alfabeto disponemos de un único axioma, A₁.MI, y de cuatro reglas de transformación (no las llamaremos *reglas de inferencia* porque no tiene caso decir aquí que estas reglas conservan o transmiten la verdad),

- R₁. Si tienes una palabra cuya última letra es I, puedes añadir una U al final de la palabra. Es decir, si xI es un teorema, entonces xIU también lo es.
- R₂. Si tienes la palabra Mx , entonces también tienes Mxx , siendo x la palabra que resulta de omitir la M inicial en la palabra de partida. Es decir, si Mx es un teorema, entonces Mxx también lo es.
- R₃. Si III ocurre dentro de una palabra, entonces puedes obtener una nueva palabra que contenga U en lugar de III. En otras palabras, III puede reemplazarse por U en cualquier teorema.
- R₄. Puedes eliminar cualquier aparición de UU dentro de una palabra. En otras palabras, UU puede eliminarse de cualquier teorema.

Por ejemplo, si aplicamos la primera regla, de MI obtenes MIU, de MUUI obtienes MUUIU. La segunda regla, de MIU obtienes MIUIU, de MUM obtienes MUMUM, de MU obtienes MUU, y así. La tercera regla, de UMIIIMU obtienes UMUMU, de MIII obtienes tanto MIU como MUI, de MIIMII no puedes ir a ningún lado, pues las tres III deben ser consecutivas, de MIII obtienes MU. Esta regla no es reversible, esto es, de MU no puedes pasar a MIII. Ejemplos de la cuarta regla son: de UUU obtienes U, de MUUUII obtienes MUII, de MIIUU obtienes MII, y así.

El desafío consiste en probar o bien que la palabra MU es un teorema en el sistema MIU, o bien que no lo es. Si MU es un teorema de MIU, entonces puede ser generado a partir de su único axioma y las cuatro reglas de transformación ya referidas, y en tal caso habrá que mostrar su derivación. Si MU no es un teorema de MIU, entonces habrá que probar que bajo ninguna circunstancia puede ser generado por el axioma y las cuatro reglas de MIU. Esta prueba no es una derivación en MIU, sino que tendrá la forma de una demostración en el metalenguaje (esto es, un lenguaje de orden superior al lenguaje en el que se encuentran las palabras de MIU). De modo que si buscas una derivación con fórmulas de MIU a la manera del ejercicio 4, no la encontrarás. Un buen principio sería ordenar sistemáticamente todas las infinitas palabras de MIU, tal vez en familias, de manera que aunque hay infinitas palabras en MIU, podría haber, en principio, una cantidad limitada de familias o tipos diferentes de palabras. Esto puede hacerse aplicando exhaustivamente y en orden todas las reglas de MIU a cada uno de los teoremas que se van generando. El resultado sería un árbol gigantesco con un elemento supremo ocupado por la palabra MI, el único axioma de MIU. Para cada nivel sabríamos qué reglas fueron aplicadas y cuáles fueron los teoremas obtenidos. MI tendría el nivel 0, MIU el nivel 1, y así sucesivamente. De modo que el nivel del árbol indicaría además el número de líneas que hay en la derivación de todos los teoremas de ese nivel. Este procedimiento es lo que se llama un *procedimiento de decisión* para el sistema dado, pues permite (o permitiría *en principio*) decidir si algo es o no un teorema en el sistema. Por ejemplo, para saber si la palabra MU es un teorema en MIU bastaría con encontrar esta palabra en el árbol de fórmulas de MIU, si la palabra no está en el árbol entonces no es un teorema de MIU. Pero la dificultad reside en el hecho de que el árbol jamás termina, de modo que nunca podríamos estar completamente seguros de que una palabra no es un teorema de MIU sólo porque no figura *aún* en el diagrama, ya que podría figurar luego, unos cuantos niveles más abajo. Para tener un buen procedimiento de decisión, uno útil al menos, habría que hallar un *test* mecánico que para cualquier secuencia de símbolos de MIU probara su *teorematidad*, esto es, que la secuencia dada tiene la propiedad de ser un teorema de MIU. Ten en cuenta que este ejercicio es considerablemente más difícil que los que se proponen más arriba.

El “acertijo MU” ha sido tomado de Douglas R. Hofstadter (1979) *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*, New York, Basic Books, 1999, cap. 1: pp. 33-41, cap. 9: pp. 260-261.

Clave de corrección

1.a S es un sistema axiomático formal porque los términos primitivos ' C ' y ' $*$ ' no tienen significado y, por lo tanto, los axiomas y los teoremas no son verdaderos ni falsos. 1.b Dar una interpretación de S consiste en asignar significado a los términos primitivos por medio de reglas de designación. Estas reglas hacen corresponder a cada término primitivo una y sólo una designación en un dominio de objetos, tal que los nombres de objetos designan objetos en el dominio, las propiedades clases de objetos, las relaciones entre dos cosas clases de pares ordenados de objetos, y así sucesivamente. 1.c Un modelo de S es una interpretación de S que hace verdaderos a A_1 y A_2 , que son todos los axiomas de S . 1.d No es un modelo, pues no todos los axiomas de S son verdaderos bajo esta interpretación. Cuando $a = 2$ y $b = 4$ el axioma A_1 es falso en tanto que $2 + 4$ no es un elemento del conjunto M . Si ' C ' designara al conjunto de los números naturales con el cero y todo lo demás permaneciera igual la nueva interpretación sería un modelo de S , pues la suma es una operación cerrada sobre los números naturales, y esto es justamente lo que afirma A_1 . 1.e R_1 . ' C ' designa al conjunto de los números naturales sin el cero, y R_2 . ' $*$ ' designa a la operación binaria de multiplicación. El número 1 es el elemento e de A_2 . 1.f Porque S tiene por lo menos un modelo y si un sistema tiene modelo entonces es consistente. 1.g El caso 2-4 bajo la interpretación dada en d) hace verdadero A_2 y falso A_1 , que son los únicos dos axiomas de S . Pero entonces A_1 tiene que ser independiente de A_2 , pues si pudiera derivarse A_1 a partir de A_2 todo modelo de A_2 sería también un modelo de A_1 . Sin embargo no es éste el caso, de modo que A_1 es independiente.

2.a A_1 Cada línea tiene dos vértices. A_2 Ningún vértice está en más de dos líneas. A_3 Los vértices no están todos en una misma línea. A_4 Cada par de líneas tiene un único vértice en común. A_5 Ninguna línea tiene más de dos vértices. 2.b Sí.

3.

T_1 . Las pulgas existen.

1. Supongamos que a es un perro (por A_1).
2. a tiene al menos una pulga (por A_3).
3. Por lo tanto, existe al menos una pulga. Q. Q. D.

T_2 . Algunas mascotas tienen pulgas.

1. Supongamos que b es el dueño de a (o a es la mascota de b), siendo a un perro (por A_4).
2. a tiene pulgas (por A_3).
3. Por lo tanto, algunas mascotas tienen pulgas. Q. Q. D.

T_3 . Los buenos dueños no tienen perros.

1. Supongamos que b es un buen dueño (por A_5).
2. b no tiene insectos (por A_5).
3. Todo perro tiene insectos (por A_3 y A_2).
4. b no tiene perros.
5. Por lo tanto, los buenos dueños no tienen perros. Q. Q. D.

4. Si tratamos de contar las ' I ' que contiene cada teorema nos daremos cuenta rápidamente que nunca llegaremos a 0. En otras palabras, no importa cuánto alargemos o acortemos las palabras, nunca podremos eliminar del todo las ' I '. Llamemos 'cantidad-de- I ' al número de ' I ' que hay en una palabra. Notemos que cantidad-de- I será 1 para el axioma MI. Podemos no sólo mostrar que cantidad-de- I nunca será 0, también podemos mostrar que cantidad-de- I nunca será múltiplo de 3. En primer lugar, notemos que las reglas I y IV no alteran en nada el valor de cantidad-de- I . Tenemos que concentrarnos en las reglas II y III. La regla III sólo permite crear un múltiplo de 3 si la palabra de partida ya tenía una cantidad-de- I múltiplo de 3. Lo mismo ocurre con la regla II, que duplica el valor cantidad-de- I . La razón es que si $2n$ es divisible por 3, entonces —como 2 no es divisible por 3— debe ser n divisible por 3. Pero ni la regla II ni la regla III pueden crear un múltiplo de 3 de la nada. Lo que sabemos, entonces, es que (1) cantidad-de- I comienza en 1 (que no es múltiplo de 3), (2) dos de las reglas no afectan el valor de cantidad-de- I , y (3) las dos reglas restantes afectan el valor de cantidad-de- I pero sólo crean un múltiplo de 3 si ya había inicialmente un múltiplo de 3. La conclusión es que cantidad-de- I nunca podrá ser múltiplo de 3. En particular, 0 es un valor prohibido para cantidad-de- I . Y, por lo tanto, MU no es un teorema del sistema MIU.