

Guías y ejercicios de lógica de primer orden

Carlos A. Oller

1. Lógica Informal

1.1. Analizar los argumentos contenidos en los textos siguientes, indicando sus premisas y conclusiones:

1. ¿Qué beneficia más? ¿Ser gobernado por un hombre excelente o por excelentes leyes? ... Mejor es aquello que no está sujeto en absoluto a pasiones, que aquello a lo cual ellas son connaturales. Ahora bien, esas pasiones no corresponden a las leyes, mientras que toda alma humana, necesariamente, las posee. (Aristóteles, *Pol.*, III, 10, 1286)

2. En general, en cualquier parte en que haya una jerarquía de grados de valor (un mejor), aquí hay también una cima de perfección (un óptimo), y como en el dominio de las realidades existentes, hay siempre una mejor que la otra, habrá también, pues una óptima entre todas, que será Dios (lo divino). (Aristóteles, *De philos.*, fr.16, Walzer y Rose)

3. Pues si algo fuese bien o mal por naturaleza, debía ser para todos bien o mal, como la nieve es fría para todos; pero, contrariamente a eso, no existe bien o mal que sea común para todos; luego, no existe bien o mal por naturaleza... Pues la misma cosa es estimada un bien por uno (como el placer por Epicuro), un mal por otro (como por Antístenes): de ahí se derivará, pues, que la misma cosa es bien y mal (Diógenes Laercio, *Vida de filósofos ilustres*, IX, 101)

4. Es imposible que un continuo conste de indivisibles, como la línea de puntos, si la línea es continua y el punto indivisible... Sería necesario que los puntos estuviesen en continuidad o en contacto recíproco, para que resultase un continuo; y el mismo discurso se aplica a todos los indivisibles... Ya que están en continuidad las cosas entre las cuales no se ha interpuesto ninguna intermedia del mismo género, pero entre los puntos hay siempre una línea intermedia y entre los instantes un tiempo... Es

evidente que cada continuo es divisible en partes siempre divisibles... La misma argumentación conserva su valor para la magnitud, para el tiempo y para el movimiento. (Aristóteles, *Fís.*, VI, 1, 231)

5. Entre los que disputan en torno al problema del criterio de la verdad, algunos afirman su existencia, como los estoicos y otros; otros, como Jeniades de Corinto y Jenófanes, lo niegan ... Para juzgar la controversia en torno al criterio, nos es necesario poseer un criterio reconocido por medio del cual podamos juzgarlo. Y para tener un criterio reconocido antes es necesario resolver la controversia sobre el criterio. Así, cayendo el discurso en el dialele, se hace imposible la búsqueda del criterio, no concediendo nosotros que se acepte un criterio por hipótesis, rechazando hasta el infinito a quien quiera juzgar el criterio con otro criterio. Además, puesto que la demostración exige un criterio, y el criterio una demostración juzgada, así el discurso vuelve a caer en el dialele. (Sexto Empírico, *Lin. pirronianos*, II, 18-20)

6. Tesis: La causalidad según leyes naturales no es la única de la que pueden derivarse todos los fenómenos del mundo; para explicarlos es preciso suponer, además, una causalidad por libertad. Demostración: Supóngase que no hay otra causalidad que la regida por las leyes naturales; entonces todo cuanto sucede supone un estado anterior al cual sigue ineluctablemente según una regla. Ahora bien, el estado anterior mismo debe ser algo que haya sucedido (que haya llegado a ser en el tiempo, puesto que antes no era); porque si hubiera sido siempre, su consecuencia no se habría originado, sino que habría sido siempre. Por consiguiente, la causalidad de la causa, en virtud de la cual ocurre algo, es ella misma algo ocurrido que a su vez supone, según las leyes naturales, un estado anterior y su causalidad, éste a su vez otro anterior y así

2

sucesivamente. Por lo tanto, si todo sucede según meras leyes naturales, nunca hay más que un comienzo subalterno, nunca primero y, en consecuencia, no hay en absoluto integridad en la serie por el lado de las causas que provengan unas de otras. Ahora bien, la ley natural consiste precisamente en que nada sucede sin una causa suficiente determinada a priori. Por lo tanto, la proposición de que toda causalidad sólo es posible según leyes naturales, se contradice a sí misma en su universalidad ilimitada, y ésta en consecuencia no puede considerarse como única. Por consiguiente, es preciso suponer una causalidad en virtud de la cual suceda algo sin que su causa esté determinada aún por otra causa precedente, según leyes necesarias, esto es, una absoluta espontaneidad de las causas, para comenzar por sí una serie de fenómenos que se desarrolla según leyes naturales y, por consiguiente, una libertad trascendental sin la

cual está incompleta, aun en la marcha de la naturaleza, la sucesión de los fenómenos del lado de las causas. (E. Kant, *Crítica de la Razón Pura*)

1.2. Mostrar la invalidez de los siguientes razonamientos construyendo un contraejemplo para cada uno de ellos:

- 1. Si la temperatura supera los treinta grados, sube el consumo de energía eléctrica. Sube el consumo de energía eléctrica. Por lo tanto, la temperatura supera los treinta grados.**
- 2. Si gané la lotería, soy rico. No gané la lotería. Por lo tanto, no soy rico.**
- 3. Todos los correntinos son argentinos. Algunos americanos son argentinos. Por lo tanto, algunos americanos son correntinos.**
- 4. Todo verdadero artista es sensible. Ningún hombre de negocios es un verdadero artista. Por lo tanto, ningún hombre de negocios es sensible.**
- 5. Todos los comunistas admiran a Marx. Algunos profesores admiran a Marx. Por lo tanto, algunos profesores son comunistas.**
- 6. Todo político que no cumple sus promesas es un mentiroso. Gómez es un político. Por lo tanto, Gómez es un mentiroso.**
- 7. Si Dios no existe, todo está permitido. Dios existe. Por lo tanto, no todo está permitido.**
- 8. Si hay seres inteligentes en otras galaxias y tienen una civilización más avanzada que la nuestra, han visitado la Tierra. Hay seres inteligentes en otras galaxias. Por lo tanto, seres inteligentes de otras galaxias han visitado la Tierra.**
- 9. Dado cualquier ente, o bien ese ente es causado o bien no lo es. Por lo tanto, dado cualquier ente, ese ente es causado o dado cualquier ente, ese ente no es causado.**
- 10. Si la enseñanza de la religión en la escuelas es esencial para mantener la salud moral de esta sociedad, entonces la tasa de criminalidad aumentará en esta sociedad si se suprime la enseñanza de religión en las escuelas. Se ha suprimido la enseñanza de la religión en las escuelas y la tasa de criminalidad ha aumentado. Por lo tanto, la enseñanza de la religión en las escuelas es esencial para mantener la salud moral de esta sociedad.**

3

1.3. Explicar por qué los siguientes argumentos son falaces e indicar qué tipo de falacia ejemplifican:

- 1. Los filósofos no han podido ofrecer una demostración irrefutable de la existencia de Dios. Por lo tanto, Dios no existe.**
- 2. En general, las mujeres reciben salarios inferiores a los hombres por igual trabajo. Por lo tanto, la ministra de medio ambiente recibe un salario inferior al ministro de economía.**
- 3. Los seres humanos decaen y mueren. Las sociedades están compuestas por seres humanos. Por lo tanto, las sociedades también decaen y mueren.**
- 4. Los que critican el psicoanálisis están expresando resistencias inconscientes a esta teoría. Por lo tanto, sus críticas no son válidas.**
- 5. El consumo habitual de alcohol aumenta la probabilidad de sufrir un cáncer de hígado. Por lo tanto, el consumo habitual de alcohol causa el cáncer de hígado.**
- 6. Aristóteles, que era un filósofo genial, sostiene que el mundo es eterno. Por lo tanto, el mundo es eterno.**
- 7. Después de tomar los medicamentos que le recetó el médico, Pedro se curó. Es obvio que esos medicamentos fueron la causa de la recuperación de Pedro.**
- 8. El acusado es un buen padre de familia, buen marido y buen profesional. Por lo tanto, no ha cometido los crímenes horribles que se le atribuyen.**
- 9. Los argentinos consumen más carne vacuna que los españoles. Nacha es argentina y Sarita española. Por lo tanto, Nacha consume más carne vacuna que Sarita.**
- 10. La perfección de cada cosa se encuentra en el fin para el cual fue creada. La muerte es el fin de la vida. Por lo tanto, la perfección de la vida se encuentra en la muerte.**

4

2. El Lenguaje de la Lógica Proposicional

2.1. Subrayar en las siguientes oraciones las locuciones que

expresan las conectivas indicadas entre paréntesis:

5

1. Platón no es empirista. (negación)
2. No es verdad que Velázquez sea impresionista. (negación)
3. Platón era griego y Foucault francés. (conjunción)
4. Platón era griego, pero Foucault no. (conjunción; negación)
5. Aunque Foucault es profundo, todos lo comprenden. (conjunción)
6. Vendrá o llamará. (disyunción)
7. No vendrá, a menos que lo llames. (negación; disyunción)
8. Leeré a Foucault, si encuentro algún libro suyo en oferta.
(condicional)
9. Si tienes más de 18 años y menos de 20, tienes 19. (conjunción;
condicional)
10. Ser argentino es condición suficiente para ser americano.
(condicional)
11. Ser argentino no es condición necesaria para ser americano.
(negación; condicional)
12. Este triángulo es equilátero si y sólo si es equiángulo. (bicondicional)
13. Que este número sea múltiplo de dos es condición necesaria y
suficiente para que sea par. (bicondicional)
14. Ni Quine es idealista, ni Platón empirista. (negación; conjunción)
15. Si ni Foucault ni Derrida son filósofos analíticos, hay por lo menos
dos filósofos franceses que no son analíticos. (negación; conjunción;
condicional)

6

2.2. Transforme las siguientes expresiones en fórmulas de la lógica proposicional cuya conectiva principal sea un condicional, utilizando paréntesis cuando sea necesario:

1. $p \rightarrow r \leftrightarrow q$

2. $p \vee r \rightarrow q \vee r$

3. $p \wedge q \rightarrow p$

4. $q \rightarrow \neg s \wedge t$

5. $p \rightarrow r \leftrightarrow q \rightarrow r$

2.3. Mostrar que las siguientes son fórmulas bien formadas de la lógica proposicional, construyendo la secuencia de formación de cada una de ellas:

1. $(p \vee \neg p)$

2. $((p \wedge q) \rightarrow p)$

3. $((p \wedge \neg p) \vee r) \rightarrow r$

4. $((p \wedge q) \vee r) \rightarrow r$

5. $((p \wedge q) \vee r) \leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$

2.3. Formalizar las oraciones del ejercicio 2.1. en el lenguaje de la lógica proposicional.

7

3. Lógica Proposicional: Semántica

3.1. Construir la tabla de verdad de las siguientes fórmulas:

1. $p \vee \neg p$

2. $(p \wedge q) \rightarrow p$

3. $((p \wedge \neg p) \vee r) \rightarrow r$

4. $((p \wedge q) \vee r) \rightarrow r$

5. $((p \wedge q) \vee r) \leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$

3.2. Simbolizar los siguientes enunciados y determinar mediante tablas de verdad si las fórmulas obtenidas son tautologías, contradicciones o contingencias:

1. El certificado tiene validez, si está firmado por el director o el vicedirector.
2. Si no es verdad que Bunge sea idealista o conductista, entonces no es idealista y no es conductista.
3. Muero si no muero, y si muero no muero.
4. La inflación aumentará, a menos que baje la emisión de moneda u ocurra un milagro.
5. Si Buenos Aires es y no es la capital de la Argentina, entonces Roma es la capital de Francia.

8

3.3. Justificar las siguientes afirmaciones:

1. Si un enunciado B es una consecuencia semántica de {A}, entonces el condicional $A \rightarrow B$ es tautológico.
2. Si el condicional $A \rightarrow B$ es tautológico, entonces B es una consecuencia semántica de {A}.
3. Si A es un enunciado tautológico, entonces cualquier enunciado B es una consecuencia semántica de $\{ \neg A \}$.
4. Si B es un enunciado tautológico, entonces B es una consecuencia semántica de {A}, para cualquier enunciado A.
5. Dado un conjunto de enunciados $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, cada uno de los A_i es una consecuencia semántica de Γ .

3.4. Determinar mediante tablas de verdad si las fórmulas de la lista A implican lógicamente a las fórmulas correspondientes de la lista B.

Lista A	Lista B
$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
$\neg p$	$p \rightarrow q$
$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$

9

$$p \rightarrow r \quad (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$$

3.5. Utilizar el método del condicional asociado para determinar si las siguientes formas argumentales son válidas:

1. $p \models p \vee q$

2. $q \models p \rightarrow q$

3. $p \leftrightarrow q \models p \rightarrow q$

4. $p \leftrightarrow q \models (p \rightarrow r) \leftrightarrow (q \rightarrow r)$

5. $(p \wedge q) \vee r \models (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

4. Lógica Proposicional: Sintaxis

4.1. Escribir las líneas que faltan en las derivaciones siguientes:

a. **_1.** $p \rightarrow q$

_2. $q \rightarrow r$

_3. p

4. **MP 1,3**

5. **MP 2,4**

6. **Prod 4,5**

b. **_1.** $p \wedge q$

_2. $(p \vee q) \rightarrow t$

3. **Simp1 1**

4. **Ad1 3**

5. **MP 2,4**

c. **_1.** $p \rightarrow q$

_2. $q \rightarrow (r \wedge \neg s)$

_3. $\neg s \rightarrow t$

4. **Hipótesis**

5. **MP 1,4**

6. **MP 2,5**

10

7.	Simp2 6
8.	MP 3,7
9. $p \rightarrow t$	TD 4-8
d.	
_1. $p \rightarrow q$	
_2. $p \vee s$	
_3. $s \rightarrow \neg\neg t$	
4.	Hipótesis
5.	MP 1,4
6.	Ad1 5
7.	Hipótesis
8.	MP 3,7
9.	DN 8
10.	Ad2 9
11. $q \vee t$	Cas 2, 4-6, 7-10

e.	
_1. $(p \wedge q) \rightarrow (r \rightarrow \neg s)$	
_2. $q \wedge s$	
3.	Hipótesis
4.	Simp1 2
5.	Prod 3,4
6.	MP 1,5
7.	Hipótesis
8.	Simp2 2
9.	MP 6,7
10.	Prod 8,9
11.	Abs 7-10

12. $p \rightarrow \neg r$	TD 3-11
----------------------------	----------------

11

4.2. Derivar la conclusión de las formas argumentales siguientes utilizando las reglas básicas de la lógica proposicional:

1. $p \vdash \neg\neg p$

2. $\neg p \rightarrow p \vdash p$

3. $\neg p \vdash p \rightarrow q$

4. $\neg p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow p$

$$5. p \leftrightarrow q \vdash (p \wedge r) \leftrightarrow (q \wedge r)$$

4.3. Formalizar los siguientes argumentos y derivar su conclusión utilizando las reglas básicas del cálculo proposicional:

1. Si Dios no existe, todo está permitido. Pero, o Dios existe o no existe. Por lo tanto, o todo está permitido o Dios existe.

2. Si la neurosis obsesiva es hereditaria, entonces el número de neuróticos obsesivos con antecedentes familiares de esa dolencia será significativamente mayor que el de los neuróticos obsesivos que no presentan tales antecedentes. Sin embargo, no es así. Es necesario concluir que la neurosis obsesiva no es hereditaria.

3. Si el rey de Argentina es calvo, entonces hay un rey de Argentina. Si el rey de Argentina no es calvo, entonces hay un rey de Argentina. No hay un rey de Argentina. Por lo tanto, el rey de Argentina es calvo si y sólo si el rey de Argentina no es calvo.

12

4. Si estás enfermo no necesitas un médico, dado que o te curas o te mueres. Si te curas no necesitas un médico y si te mueres tampoco lo necesitas.

5. Si el mal existe en este mundo y no se origina en las acciones de los seres humanos, entonces Dios no puede o no quiere impedirlo. El mal existe en este mundo. Si Dios no puede impedir que haya mal en este mundo, entonces no es omnipotente. Si Dios no quiere impedir la existencia del mal, entonces no es bondadoso. Pero Dios es omnipotente y bondadoso. Luego, el mal que existe en este mundo tiene su origen en las acciones de los seres humanos.

**4.4. Derivar la conclusión de las siguientes formas de argumento utilizando: a) por lo menos una regla derivada
b) sólo reglas básicas**

$$1. p \rightarrow (q \vee r), (q \vee r) \rightarrow s, p \wedge t \vdash t \wedge s$$

$$2. p \vee q, q \rightarrow s \vdash \neg p \rightarrow s$$

3. $p \rightarrow q, (r \rightarrow q) \rightarrow s \vdash p \rightarrow s$
4. $p \rightarrow q, r \rightarrow (s \vee p), \neg q \vdash r \rightarrow s$
5. $p \rightarrow (q \rightarrow r), r \rightarrow s, q \vdash p \rightarrow s$
6. $p \leftrightarrow q, r \rightarrow p, q \rightarrow (\neg s \wedge t) \vdash r \rightarrow t$
7. $\neg(p \wedge q) \rightarrow s, \neg p \vdash s$
8. $\neg(p \vee q) \wedge s, t \rightarrow \neg s \vdash \neg t \wedge \neg p$
9. $p \rightarrow (q \vee r), \neg(\neg q \wedge \neg r) \rightarrow t, p \wedge s \vdash t \vee u$
10. $p \vee q, p \rightarrow (s \wedge r), q \rightarrow (s \wedge t) \vdash s$

13

4.5. Demostrar las siguientes fórmulas:

1. $q \rightarrow (p \rightarrow q)$
2. $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r))$
3. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)))$
5. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow (q \rightarrow s)) \rightarrow (r \rightarrow (p \rightarrow s)))$

14

5. El Lenguaje de la Lógica de Predicados

5.1. Subrayar en las siguientes oraciones las locuciones que expresan predicados e indicar si éstos son monádicos o poliádicos:

1. **Marte es un planeta.**
2. **Platón es griego.**

3. Platón no es empirista.
4. Platón fue discípulo de Sócrates.
5. Platón era griego y Foucault francés.
6. Si la Tierra es un planeta, gira alrededor del Sol.
7. Juan o Pedro llamará a María.
8. Pedro admira a Quine y a Foucault,
9. Si Juan es hermano de Pedro, entonces Pedro es hermano de Juan.
10. Sócrates fue maestro de Platón si y sólo si Platón fue su discípulo.

5.2. Formalizar las oraciones del ejercicio 5.1.

5.3. Insertar paréntesis en las fórmulas siguientes de manera que no aparezca en ellas ninguna variable libre:

1. $\Lambda x Px \rightarrow \neg Qx$
2. $\Lambda x (Px \wedge Qx) \rightarrow Rx$
3. $Vx (Px \rightarrow (Qx \vee Rx)) \rightarrow (\Lambda x Px \vee Vx \neg Qx \vee Rx)$
4. $\Lambda x \Lambda y Pxy \vee \neg Pxy$
5. $\Lambda x (Px \wedge Qx) \rightarrow Rx) \rightarrow (Px \rightarrow (Qx \rightarrow Rx))$

5.4. Formalizar las siguientes oraciones:

1. Todo es mortal.
2. Nada es eterno.
3. No todo es eterno.
4. No hay círculos cuadrados.
5. Algunos admiran a Quine.

6. Algunos triángulos son equiláteros.
7. Hay triángulos que no son equiláteros.
8. Cualquier triángulo es un polígono.
9. Ningún dios es mortal.
10. Los triángulos equiláteros son polígonos regulares.
11. Los perros y los gatos son animales domésticos.
12. Las aves nadan y vuelan.
13. Hay filósofos que son admirados por Pedro.
14. Hay filósofos que son admirados por todos los estudiantes.
15. Si algo falta, Juan será culpado.
16. Todos los que aman sufren.
17. Ningún empirista acepta las tesis de Platón.
18. Algunos que admiran a Quine admiran también a Foucault.
19. El que hace infeliz a un niño hace infeliz a un ser humano.
20. Quien sólo se ama a sí mismo no ama a su prójimo.

16

6. Lógica de Predicados: Semántica

6.1. Dar una interpretación que muestre que las siguientes formas argumentales no son válidas:

1. $\forall x (Px \rightarrow Qx) \models \forall x (Px \wedge Qx)$
2. $\forall x Px \wedge \forall x Qx \models \forall x (Px \wedge Qx)$
3. $\forall x \forall y Pxy \models \forall x Pxx$
4. $\forall x (Px \rightarrow Qx), \forall x (Qx \rightarrow Rx) \models \forall x (Px \rightarrow Rx)$

5. $\forall x \forall y Pxy \models \forall y \forall x Pxy$

6.2. *Indicar cuántos elementos debe tener, como mínimo, el dominio de una interpretación que haga verdaderas a las siguientes fórmulas y dar un ejemplo de una interpretación tal:*

17

1. $Pa \wedge \neg Pb$

2. $Pa \wedge \neg Pb \wedge \neg Qa \wedge \neg Qb \wedge Qc$

3. $Pa \wedge \neg Pb \wedge \neg Qa \wedge \neg Qb \wedge Qc \wedge Pc \wedge \neg Pd \wedge Qd$

4. $Pa \wedge Qa \wedge Ra \wedge Pb \wedge \neg Qb \wedge Qc \wedge \neg Pc$

5. $\forall x \neg Pxx \wedge \forall x \forall y \forall z ((Pxy \wedge Pyz) \rightarrow Pxz) \wedge \forall x \forall y Pxy$

7. Lógica de Predicados: Sintaxis

7.1. *Escribir las líneas que faltan en las derivaciones siguientes:*

a. 1. $\forall x(Px \wedge Qx)$

- | | |
|----|-----------|
| 2. | Hipótesis |
| 3. | Simp1 2 |
| 4. | IP 3 |
| 5. | Simp2 2 |
| 6. | IP 5 |
| 7. | Prod 4,5 |
| 8. | EP 1, 2-7 |

b. 1. $\forall x (Px \rightarrow Qx)$

2. $\forall x (Qx \rightarrow Rx)$

- | | |
|----|---------|
| 3. | EG 1 |
| 4. | EG 2 |
| 5. | Sil 3,4 |
| 6. | IG 5 |

c. 1. $\forall x Px \wedge \forall x Qx$

- | | |
|----|---------|
| 2. | Simp1 1 |
|----|---------|

18

- 3. EG 2
- 4. Simp2 1
- 5. EG 4
- 6. Prod 3,5
- 7. IG 6

d. **_1. $\forall x (Px \vee Qx)$**

- 2. Hipótesis
- 3. Hipótesis
- 4. IP 3
- 5. Ad1 4
- 6. Hipótesis
- 7. IP 6
- 8. Ad2 7
- 9. Cas 2, 3-5, 6-8
- 10. EP 1, 2-9

e. **_1. $\forall x \forall y Pxy$**

- 2. Hipótesis
- 3. Hipótesis
- 4. IP 3
- 5. IP 4
- 6. EP 2, 3-5
- 7. EP 1, 2-6

7.2. Formalizar los argumentos siguientes y derivar sus conclusiones:

- 1. Algunos niños no son molestos. Los niños también son seres humanos. Luego, algunos seres humanos no son molestos.**
- 2. Todos los amigos de Juan son amigos de Pedro. Ana es amiga de Juan. Por lo tanto, Ana es amiga de Pedro.**
- 3. Ningún niño es un ser encantador. Pero, los hijos de Pedro son niños. Por lo tanto, los hijos de Pedro no son seres encantadores.**
- 4. Hay docentes que son mujeres y madres. Los docentes ejercen un sacerdocio. Por lo tanto, hay madres que ejercen un sacerdocio.**
- 5. El hombre destruye lo que ama. El hombre ama lo que no entiende. Luego, el hombre destruye lo que no entiende.**
- 6. Todo aquel que chupa la sangre a otra persona es un vampiro. Los vampiros no existen. Luego, nadie chupa la sangre a otra persona.**

19

7. Juan se ama a sí mismo. Por lo tanto, no es cierto que nadie ame a Juan.

8. Los niños también son seres humanos. Por lo tanto, el que hace infeliz a un niño hace infeliz a un ser humano.

9. Juan no respeta a nadie que no se respete a sí mismo. Juan respeta a María. Por lo tanto, María se respeta a sí misma.

10. Tony le corta el pelo a todos los habitantes de Buenos Aires que no se cortan el pelo a sí mismos y sólo a ellos. Tony es habitante de Buenos Aires. Por lo tanto, Tony no le corta el pelo a nadie.

7.3. Derivar la conclusión de las siguientes formas de argumentos:

1. $\forall x \forall y Pxy \vdash \forall y \forall x Pxy$

2. $\forall x (Px \rightarrow \neg Qx), Qa \vdash \forall x \neg Px$

3. $\forall x Px, Pa \rightarrow \forall x Qx \vdash \forall x Qx$

4. $\forall x (Px \rightarrow \neg Rx), \forall x (Px \wedge Qx) \vdash \forall x \neg Rx$

20

5. $\forall x ((Px \wedge Qx) \rightarrow Rx), \forall x (Qx \wedge \neg Sx) \vdash \forall x (\neg Px \vee Rx)$

6. $\forall x (Px \rightarrow (Qx \vee Rx)), \forall x (Sx \wedge \neg Rx), \forall x (Qx \rightarrow Tx) \vdash \forall x (Px \rightarrow Tx)$

7. $\forall x Pxx \vdash \forall x \forall y Pxy$

8. $\forall x \forall y (Px \rightarrow Qy) \vdash \forall x \neg Px \vee \forall y Qy$

9. $\forall x \forall y (Px \wedge \neg Qy) \vdash \forall x Px \wedge \neg \forall y Qy$

10. $\forall x \forall y (Pxy \rightarrow Qxy), \forall x \forall y (Pxy \vee Rxy), \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Pxy) \vdash \neg \forall x \forall y \neg Qxy$

7.4. Demostrar las siguientes fórmulas:

1. $\Lambda x (Px \rightarrow Qx) \rightarrow Vx \neg(Px \wedge \neg Qx)$

2. $\Lambda x ((Px \wedge Qx) \rightarrow Rx) \rightarrow (Vx Px \rightarrow (\Lambda x Qx \rightarrow Vx Rx))$

3. $Vx (Px \rightarrow (Qx \vee Rx)) \rightarrow (\Lambda x Px \rightarrow Vx (\neg Qx \rightarrow Rx))$

4. $\Lambda x V y \neg Pxy \vee \Lambda y V x Pxy$

5. $\Lambda x (Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\Lambda x \Lambda y (Px \rightarrow Rxy) \rightarrow (Vx V y (\neg Qx \vee \neg Rxy) \rightarrow Vx \neg Px))$

Guías

Guía 1: Formalización en Lógica Proposicional

Negación $\neg A$

No A

No es verdad que A

No se da que A

Es falso que A

etc.

Conjunción $A \wedge B$

A y B

A, pero B

A, aunque B

A, sin embargo B

A, a pesar que B

etc.

Disyunción incluyente $A \vee B$

O A o B, o ambas cosas

A y/o B

A a menos que B

A a no ser que B

etc.

Condicional material $A \rightarrow B$

Si A, entonces B

Si A, B

B, si A

A es condición suficiente para B

B es condición necesaria para A

A sólo si B

No A a menos que B

No A a no ser que B

etc.

Bicondicional material $A \leftrightarrow B$

A si y sólo si B

A es condición necesaria y suficiente para B

etc.

Guía 2: Lógica Proposicional: Semántica

Valuación: Una valuación del conjunto \mathcal{F} de todas las fórmulas de la lógica proposicional es una función que asigna a cada fórmula de \mathcal{F} uno de los dos valores de verdad v (verdadero), f (falso).

Valuación booleana: Una valuación booleana es una valuación que cumple las siguientes condiciones:

C1. La fórmula $\neg A$ recibe el valor v si A recibe el valor f , y recibe el valor f si A recibe el valor v .

C2. La fórmula $A \wedge B$ recibe el valor v si tanto A como B reciben el valor v , y f en otro caso.

C3. La fórmula $A \vee B$ recibe el valor v si al menos una de las dos fórmulas A, B recibe el valor v , y f en otro caso.

C4. La fórmula $A \rightarrow B$ recibe el valor f si A recibe el valor v y B recibe el valor f , y v en otro caso.

C5. La fórmula $A \leftrightarrow B$ recibe el valor v si A y B reciben el mismo valor, y f en otro caso.

Tautología-Contradicción-Consistencia: Una fórmula A es una tautología si y sólo si toda valuación booleana le asigna el valor v . Una fórmula A es una contradicción si y sólo si toda valuación booleana le asigna el valor f . Una fórmula A es una consistencia si y sólo si por lo menos una valuación booleana le asigna el valor v .

23

Consecuencia semántica-Implicación lógica: Un conjunto de fórmulas Γ de la lógica proposicional implica lógicamente a una fórmula F , o F es una consecuencia semántica de Γ , en símbolos, $\Gamma \models F$, si toda valuación booleana que asigne el valor v a todos los elementos de Γ asigna el valor v a F .

Guía 3: Derivaciones en Lógica Proposicional

Derivación: Una derivación de una fórmula F a partir de un conjunto Γ de

premisas en un sistema de deducción natural para la lógica proposicional es una secuencia finita de fórmulas tal que a) cada uno de los miembros de esa secuencia es, o bien un miembro de Γ , o bien una hipótesis provisional, o bien una fórmula que se obtiene de una o más líneas anteriores de la secuencia mediante la aplicación de una regla de inferencia, y b) F es la última línea de esa secuencia.

Derivabilidad: Una fórmula F de la lógica proposicional es derivable de un conjunto de fórmulas Γ (en símbolos, $\Gamma \vdash F$) si y sólo si existe una derivación de F a partir de Γ .

Teorema: Una fórmula F es un teorema de la lógica proposicional si y sólo si es derivable a partir de un conjunto vacío de premisas. En símbolos, F.

Estrategias para construir derivaciones en lógica proposicional:

1. Para derivar una fórmula de la forma $A \rightarrow B$, suponga A, derive B y aplique la regla de introducción del condicional.

2. Para derivar una fórmula de la forma $A \wedge B$, derive A, derive B y aplique la regla de introducción de la conjunción.

3. Para derivar una fórmula de la forma $A \vee B$, derive A o derive B y aplique la regla de introducción de la disyunción.

4. Para derivar una fórmula de la forma $A \leftrightarrow B$, derive $A \rightarrow B$, derive $B \rightarrow A$ y aplique la regla de introducción del bicondicional.

24

5. Para derivar una fórmula de la forma $\neg A$, si no es posible una derivación directa, suponga A, derive una contradicción $B \wedge \neg B$, y aplique la regla de introducción de la negación.

Guía 4: Formalización en Lógica de Predicados

a) Formalización en lógica de predicados monádicos

i. Proposiciones singulares:

Sócrates es griego. Pa

Si Sócrates es griego, entonces Sócrates es europeo. $Pa \rightarrow Qa$

ii. Proposiciones generales:

a) Cuantificación de un predicado:

UA Todo es mortal. $\forall x Px$

EA Algo es mortal. $\exists x Px$

UN Nada es mortal. $\forall x \neg Px$

EN Algo no es mortal. $\exists x \neg Px$

b) Cuantificación simultánea de dos predicados (proposiciones categóricas):

A Todo hombre es mortal. $\forall x (Px \rightarrow Qx)$

I Algún hombre es mortal. $\exists x (Px \wedge Qx)$

E Ningún hombre es mortal. $\forall x (Px \rightarrow \neg Qx)$

O Algún hombre no es mortal. $\exists x (Px \wedge \neg Qx)$

c) Proposiciones generales con más de un cuantificador:

Si todos los hombres son mortales, entonces algún griego es mortal.

$\forall x (Px \rightarrow Qx) \rightarrow \exists x (Rx \wedge Qx)$

b) Formalización en lógica de predicados poliádicos:

i. Proposiciones singulares:

Sócrates es el maestro de Platón. Pab

Riobamba está entre Callao y Ayacucho. $Pabc$

25

ii. Proposiciones generales:

a) Cuantificación de una relación:

Todo se relaciona con todo. $\forall x \forall y Pxy$

Algo se relaciona con todo. $\forall x \exists y Pxy$

Todo se relaciona con algo. $\exists x \forall y Pxy$

Algo se relaciona con algo. $\exists x \exists y Pxy$

Nada se relaciona con nada. $\forall x \forall y \neg Pxy$

Algo no se relaciona con nada. $\forall x \forall y \neg Pxy$

¿Cómo se interpretan las siguientes fórmulas? $\exists x \forall y \neg Pxy$; $\forall x \forall y \neg Pxy$

b) Proposiciones con cuantificación simultánea de dos o más relaciones:

Para todo par de cosas se da que si la primera es mayor que la segunda, la segunda es menor que la primera. $\forall x \forall y (Pxy \rightarrow Qyx)$

iii. Proposiciones mixtas (singulares-generales)

Sócrates no escribió nada. $\forall x \neg Pax$

Sócrates enseñó algo. $\forall x Pax$

Algo mató a Pedro. $\forall x Pxa$

Ejemplos:

1) Todo satélite gira en torno a algún planeta. $\forall x (Px \rightarrow \exists y (Qy \wedge Rxy))$

2) Todos admiran a Sócrates.=Sócrates es admirado por todos. $\forall x Pxa$

3) Los alumnos que aprueban *Lógica* son inteligentes.

$\forall x ((Px \wedge Rxa) \rightarrow Qx)$

4) Todos los que son vecinos se odian. $\forall x \forall y (Pxy \rightarrow (Qxy \wedge Qyx))$

5) Sólo los ladrones admiran a los ladrones.=Todos los que admiran a los ladrones son ladrones. $\forall x \forall y ((Pxy \wedge Qy) \rightarrow Qx)$

Guía 5: Uso de las Reglas Básicas de la Lógica de Predicados

26

1) Regla de introducción del cuantificador existencial (Generalización existencial) (IP)

Πa

$\forall x \Pi x$

donde x es cualquier variable, a es cualquier constante, Πa es una expresión que contiene una o más apariciones de a , Πx el resultado de reemplazar las apariciones de a en Πa por apariciones de x .

2) Regla de eliminación del cuantificador universal (Instanciación universal) (EG)

$\forall x \Pi x$

Πa

3) Regla de eliminación del cuantificador existencial (Instanciación existencial) (EP)

$$\begin{array}{l} \mathbf{Vx \ \Pi x} \\ \left[\begin{array}{l} \mathbf{\Pi a} \\ \mathbf{:} \\ \mathbf{A} \end{array} \right. \\ \hline \mathbf{A} \end{array}$$

RESTRICCIONES: (i) La constante a no debe aparecer en $Vx \ \Pi x$. (ii) La constante a no debe aparecer en A. (iii) La constante a no debe aparecer en ningún supuesto previo no descargado del cual dependa A.

Si no se respeta la restricción (i) pueden obtenerse pseudo-demostraciones como la siguiente:

-1. $Vx \ Pxa$	Premisa
2. Paa	Hipótesis de EP
3. $Vx \ Pxx$	IP, 2
4. $Vx \ Pxx$	EP, 1, 2-3

27

Si se interpreta 1 como "Alguien ama a María", esta pseudo-demostración autoriza a inferir de esa premisa la conclusión "Alguien se ama a sí mismo" (!!!).

Si no se respeta la restricción (ii) pueden obtenerse pseudo-demostraciones como la siguiente:

-1. $VxVy \ Pxy$	Premisa
2. $Vy \ Pay$	Hipótesis de EP
3. $Vy \ Pay$	ID, 2
4. $Vy \ Pay$	EP, 1, 2-3
5. $\Lambda xVy \ Pxy$	IG, 4

Si se interpreta 1 como "Alguien ama a alguien", esta pseudo-demostración autoriza a inferir de esa premisa la conclusión "Todos aman a alguien" (!!!).

Si no se respeta la restricción (iii) pueden obtenerse pseudo-demostraciones como la siguiente:

-1. $\forall x Px$	Premisa
-2. $\forall x Qx$	Premisa
3. Pa	Hipótesis de EP
4. Qa	Hipótesis de EP
5. $Pa \wedge Qa$	IC, 3, 4
6. $\forall x (Px \wedge Qx)$	IP, 5
7. $\forall x (Px \wedge Qx)$	EP, 2, 4-6
8. $\forall x (Px \wedge Qx)$	EP, 1, 3-7

Busque una interpretación que haga verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión de este argumento.

4) Regla de introducción del cuantificador universal (Generalización universal) (IG)

28

Πa

$\wedge x \Pi x$

RESTRICCIÓN: La constante a no debe aparecer en ningún supuesto no cancelado del que dependa Πa .

Si no se respeta esta restricción pueden obtenerse pseudo-demostraciones como la siguiente:

1. $\forall x Pxa$	Premisa
2. Pba	Hipótesis de EP
3. $\forall x Pxa$	IP, 2
4. $\wedge y \forall x Pxy$	IG, 3
5. $\wedge y \forall x Pxy$	EP, 1, 2-4

29